

MOCE I KOMPENSACJA REAKTANCYJNA W LINIOWYCH OBWODACH TRÓJFAZOWYCH

Leszek S. Czarnecki, IEEE Life Fellow
Louisiana State University

Rys historyczny

Pierwsze wnioski o niekorzystnym wpływie
niezrównoważenia odbiornika na współczynnik mocy
pochodzą od
Steinmetza (1917) i Lyona (1920)

Obserwacja ta nie wpłynęła na równanie mocy odbiorników trójfazowych,
które we wszystkich teoriach mocy:

AIEE (1920);
Buchholz (1922)
Curtis & Silbee (1935);
Quade (1937);
Rosenzweig (1939);
Fryze (1985);
Koch (1986);
Depenbrock (1993);
IEEE Standard (1992)

ma tę samą postać

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Moc niezrównoważenia pojawia się w równaniu mocy

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2$$

po raz pierwszy w 1988 roku, w pracy:

Leszek S. Czarnecki:

Orthogonal decomposition of the current
in a three-phase non-linear asymmetrical circuit
with nonsinusoidal voltage,

IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement

Kluczowym zagadnieniem przy wyprowadzaniu równania mocy

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2$$

był wybór definicji mocy pozornej S

W artykule:

Orthogonal decomposition of the current
in a three-phase non-linear asymmetrical circuit
with nonsinusoidal voltage,

definicję mocy pozornej S wybrano intuicyjnie, jako:

$$S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\|$$

Trafność tego wyboru została potwierdzona analizą dopiero w **1999**r, w artykule:

Leszek S. Czarnecki:

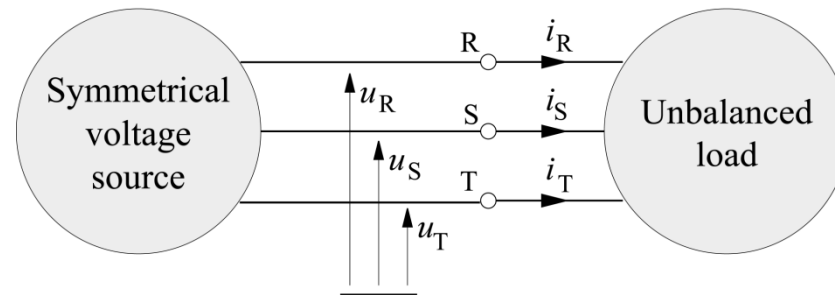
"Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality,"
Archiv fur Elektrotechnik, (82), No. 4, pp. 10-15, 1999.

W artykule tym wykazano,
 że arytmetyczna i geometryczna definicje mocy pozornej,

$$S \stackrel{\text{df}}{=} U_R I_R + U_S I_S + U_T I_T = S_A$$

$$S \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{P^2 + Q^2} = S_G$$

odbiorników niezrównoważonych

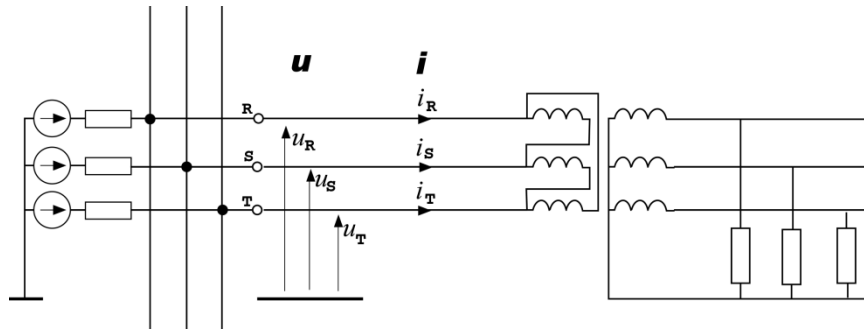


są błędne

zaś poprawną jest definicja:

$$S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\| = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2}$$

Moce w obwodach trójprzewodowych z odbiornikami LTI zasilanych symetrycznym i sinusoidalnym napięciem



$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_S(t) \\ i_T(t) \end{bmatrix} = \mathbf{i}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt = (\mathbf{u}, \mathbf{i})$$

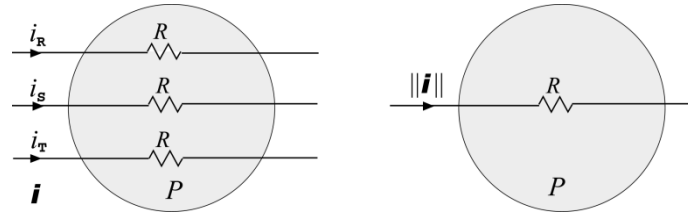
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt$$

jest iloczynem skalarnym wektorów trójfazowych, $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$

Wektory trójfazowe $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ są wzajemnie ortogonalne wtedy,

gdy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

Wartość skuteczna wielkości trójfazowych



Moc czynna symetrycznego urządzenia trójfazowego

$$P = R \frac{1}{T} \int_0^T (i_R^2 + i_S^2 + i_T^2) dt = R \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{i}(t) dt = R \sqrt{(\mathbf{i}, \mathbf{i})} = R \|\mathbf{i}\|^2$$

Funkcjonał:

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (i_R^2 + i_S^2 + i_T^2) dt} = \sqrt{\|i_R\|^2 + \|i_S\|^2 + \|i_T\|^2}$$

jest wartością skuteczną prądu trójfazowego

Jeśli wektory $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ są ortogonalne, to jest $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, wówczas

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Składowe Fizyczne Prądu (SFP) (ang.: CPC- Currents' Physical Components)
3-fazowego odbiornika LTI zasilanego symetrycznym
sinusoidalnym napięciem

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u$$

$$\mathbf{i}_a = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_e U e^{j\omega_1 t}\}$$

$$\mathbf{i}_r = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_e U e^{j\omega_1 t}\}$$

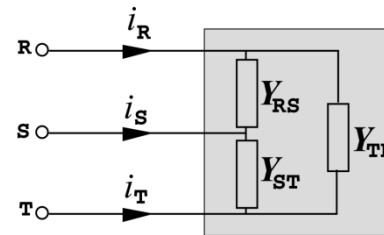
$$\mathbf{i}_u = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{A U^\# e^{j\omega_1 t}\}$$

Prąd czynny

Prąd bierny

Prąd niezrównoważenia

$$\begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix} = U, \quad \begin{bmatrix} U_R \\ U_T \\ U_S \end{bmatrix} = U^\#$$



$$Y_e = G_e + jB_e = Y_{RS} + Y_{ST} + Y_{TR}$$

$$A = - (Y_{ST} + \alpha Y_{TR} + \alpha^* Y_{RS})$$

Admitancja równoważna

Admitancja niezrównoważenia

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u$$

Wartości skuteczne prądu czynnego, biernego i prądu niezrównoważenia:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = /B_e \|\mathbf{u}\|$$

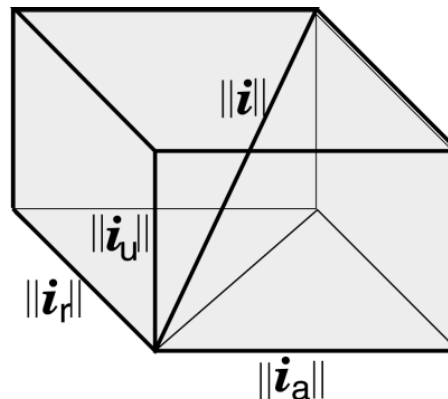
$$\|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\|$$

Prądy czynny, bierny i niezrównoważenia są wzajemnie ortogonalne, gdyż ich iloczyny skalarne są równe zero

$$(\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_r) = 0, \quad (\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_u) = 0, \quad (\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_u) = 0$$

Zatem

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2$$



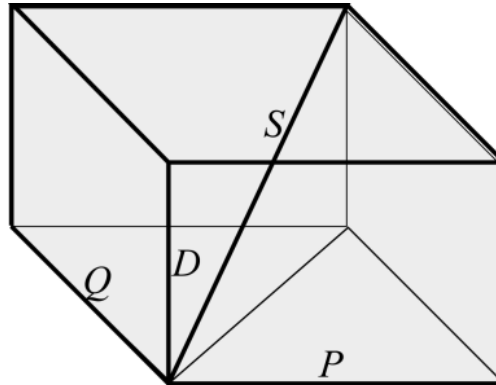
Równanie mocy:

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2, \quad \times \|\mathbf{u}\|^2$$

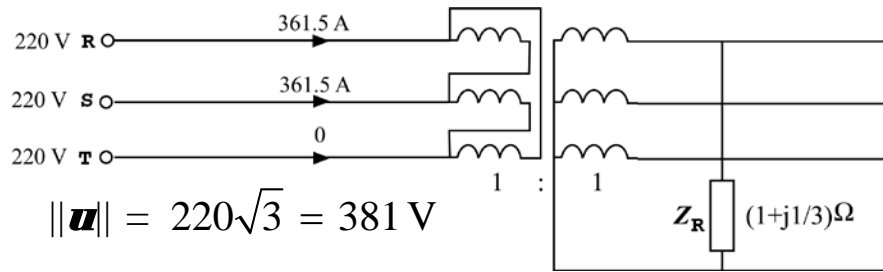
$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2$$

$$D_u \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\|^2$$

jest mocą niezrównoważenia



Przykład:



$$\|\mathbf{i}\| = 361,5\sqrt{2} = 511 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\| = 0,90 \times 381 = 343 \text{ A,}$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = /B_e \|\mathbf{u}\| = 0,30 \times 381 = 114 \text{ A,}$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\| = 0,95 \times 381 = 361 \text{ A,}$$

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2} = \sqrt{343^2 + 114^2 + 361^2} = 511 \text{ A}$$

$$S = 195 \text{ kVA, } P = 131 \text{ kW, } Q = 43 \text{ kVAr, } D_u = 138 \text{ kVA}$$

Kompensacja reaktancyjna

w obwodach trójfazowych z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia
obejmuje:

- kompensację mocy biernej
- równoważenie odbiorników niezrównoważonych

Pierwsza koncepcja kompensatora równoważącego
i metoda wyznaczania jego parametrów
pochodzi od Steinmetz'a,
z roku 1917

**W sytuacji braku pojęcia „moc niezrównoważenia”
wpływ równoważenia odbiornika na jego moc pozorną S i współczynnik mocy λ
pozostaje niejasny**

Kompensator Steinmetz'a to obwód, który redukuje oscylacje mocy chwilowej

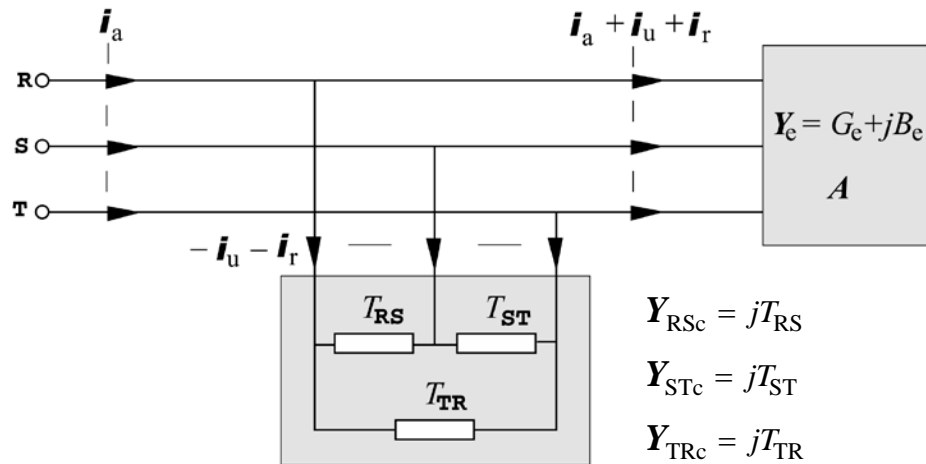
Późniejsze metody projektowania, często geometryczne, poszukiwały obwodu
kompensującego
składową symetryczną kolejności ujemnej prądu odbiornika

Algebraiczna metoda wyznaczania
parametrów kompensatora równoważącego,
oparta na koncepcji Składowych Fizycznych Prądu
została przedstawiona w 1989 r. artykule:

Leszek S. Czarnecki: „Reactive and unbalanced currents compensation in three-phase circuits under nonsinusoidal conditions”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IM-38, No. 3, pp. 754-459, 1989.

Reaktancyjna kompensacja prądu biernego i prądu niezrównoważenia

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2}}$$



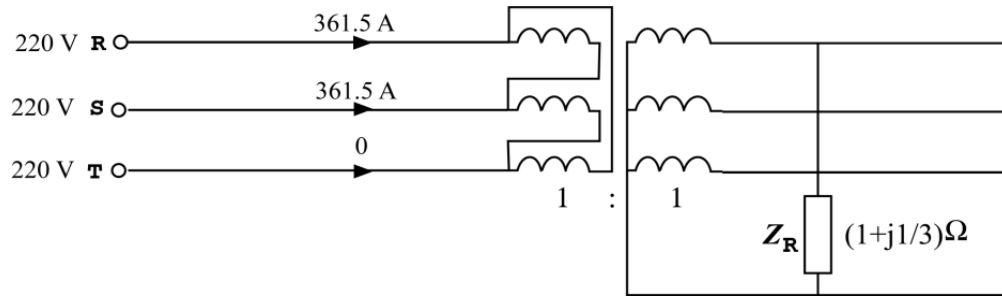
Prąd bierny i prąd niezrównoważenia odbiornika są całkowicie skompensowane, jeśli susceptance kompensatora mają wartość

$$T_{RS} = (\sqrt{3} \operatorname{Re}\{A\} - \operatorname{Im}\{A\} - B_c)/3$$

$$T_{ST} = (2 \operatorname{Im}\{A\} - B_c)/3$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \operatorname{Re}\{A\} - \operatorname{Im}\{A\} - B_c)/3$$

Przykład:



$$Y_e = G_e + jB_e = Y_{RS} = 0.90 - j0.30 \text{ S}$$

$$A = -\alpha * Y_{RS} = 0.95 e^{j42^\circ} = 0.71 + j0.64 \text{ S}$$

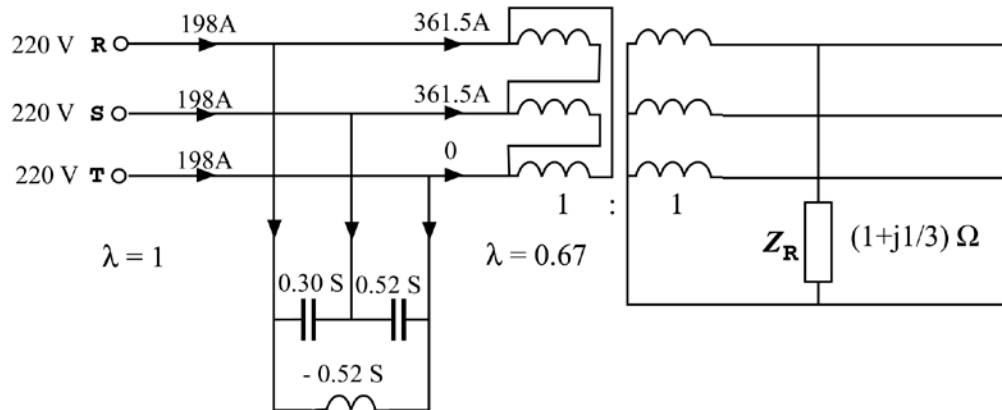
$$\|i_a\| = 343 \text{ A}, \|i_u\| = 361 \text{ A}, \|i_T\| = 114 \text{ A}, \|i\| = 511 \text{ A}, \lambda = 0.67$$

$$S = 195 \text{ kVA}$$

$$T_{RS} = (\sqrt{3} \text{Re}\{A\} - \text{Im}\{A\} - B_e) / 3 = 0.30 \text{ S}$$

$$T_{ST} = (2 \text{Im}\{A\} - B_e) / 3 = 0.52 \text{ S}$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \text{Re}\{A\} - \text{Im}\{A\} - B_e) / 3 = -0.52 \text{ S}$$



$$\|i_a\| = 343 \text{ A}, \|i_u\| = 0, \|i_T\| = 0, \|i\| = 343 \text{ A}, \lambda = 1$$

$$S = 131 \text{ kVA}$$

Przedstawione równanie mocy
i metoda obliczania parametrów kompensatora
jest punktem startowym
do definicji mocy i projektowania kompensatorów reaktancyjnych
odbiorników zasilanych napięciem niesinusoidalnym

W istocie, w cytowanych artykułach:

Leszek S. Czarnecki:

„Orthogonal decomposition of the current in a three-phase non-linear asymmetrical circuit with
nonsinusoidal voltage”, *IEEE Trans. on Instr. and Meas.* 1988.

Leszek S. Czarnecki:

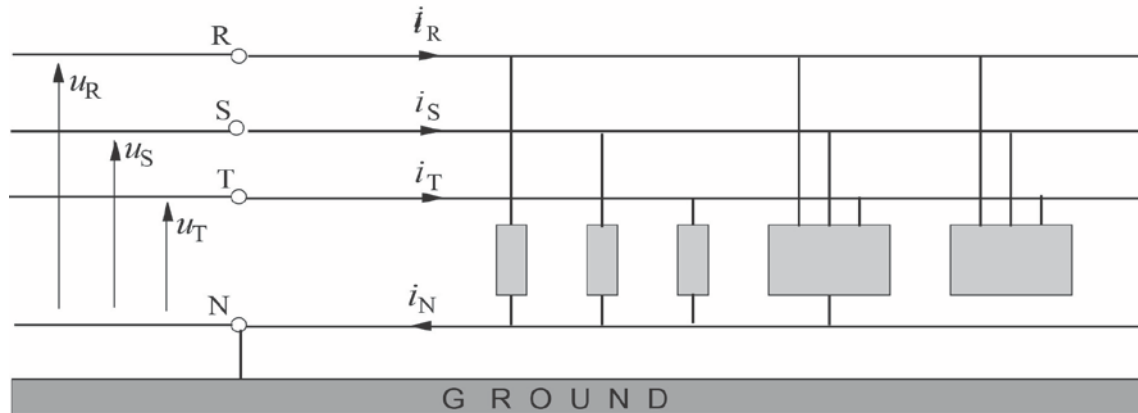
„Reactive and unbalanced currents compensation in three-phase circuits under **nonsinusoidal conditions**”,
IEEE Trans. on Instr. and Meas. 1989.

zagadnienia te zostały rozwiązane dla odbiorników zasilanych
napięciem niesinusoidalnym

Wyniki te dotyczą jednak jedynie odbiorników trójfazowych zasilanych trójprzewodowo

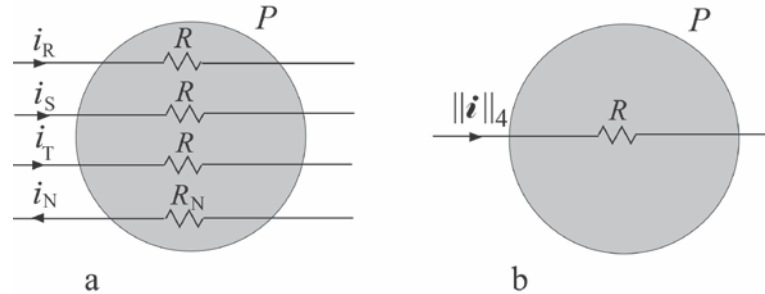
Powyższe wyniki dotyczą jednak jedynie odbiorników trójfazowych zasilanych trójprzewodowo

Nie są one prawdziwe w przypadków odbiorników trójfazowych z przewodem zerowym



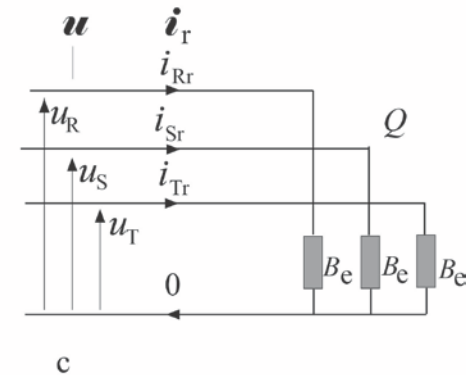
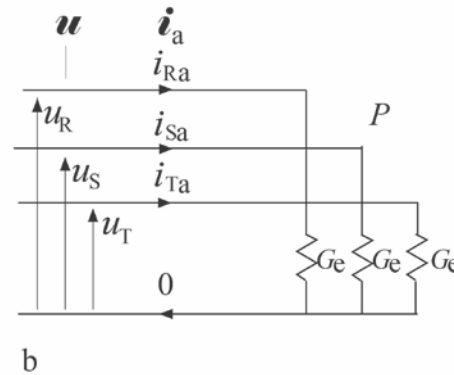
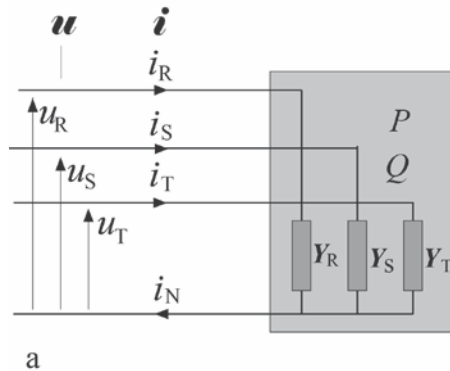
Równanie mocy odbiorników LTI zasilanych czteroprzewodowo napięciem symetrycznym i sinusoidalnym

Wartość skuteczna prądu trójfazowego w obwodzie czteroprzewodowym



$$\|i\|_4 = \|i\|_3 \sqrt{1 + \frac{R_N}{R} \left(\frac{\|i_N\|}{\|i\|_3} \right)^2}$$

Odbiorniki równoważne ze względu na moc czynną i moc bierną



$$\mathbf{i}_a(t) = G_e \mathbf{u}(t)$$

$$G_e = \frac{P}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{P}{3U_R^2} = \frac{1}{3}(G_R + G_S + G_T)$$

$$\mathbf{i}_r(t) = B_e \frac{d}{d(\omega t)} \mathbf{u}(t)$$

$$B_e = -\frac{Q}{\|\mathbf{u}\|^2} = -\frac{1}{3} \frac{Q}{U_R^2} = \frac{1}{3}(B_R + B_S + B_T)$$

$$\mathbf{i} - \mathbf{i}_a - \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_u = \mathbf{i}_u^n + \mathbf{i}_u^z$$

Składowe Fizyczne Prądu zasilania

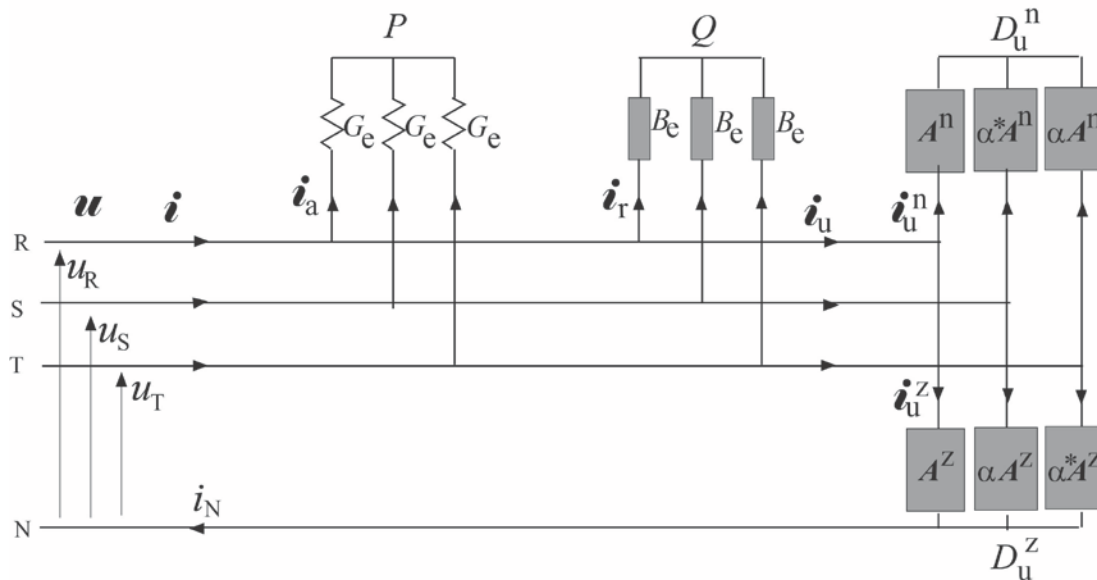
$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u^n + \mathbf{i}_u^z$$

$$\mathbf{i}_u^n \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} A^n U_R \\ A^n U_T \\ A^n U_S \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ A^n U^\# e^{j\omega t} \}$$

$$A^n \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3} (Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T)$$

$$\mathbf{i}_u^z \stackrel{\text{df}}{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} A^z U_R \\ A^z U_R \\ A^z U_R \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ A^z U_R e^{j\omega t} \}$$

$$A^z \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{3} (Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T)$$



$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u^n + \mathbf{i}_u^z$$

Składowe Fizyczne Prądu są wzajemnie ortogonalne, zatem

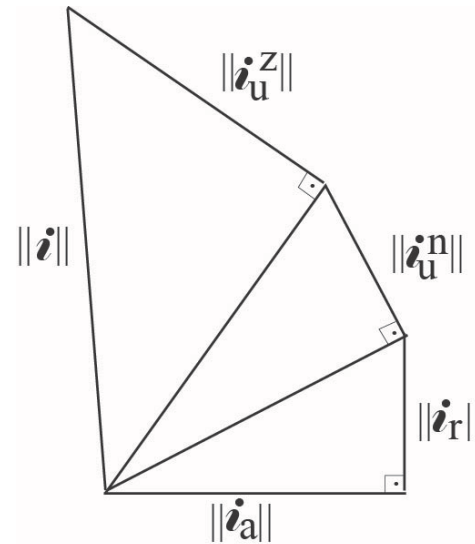
$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2.$$

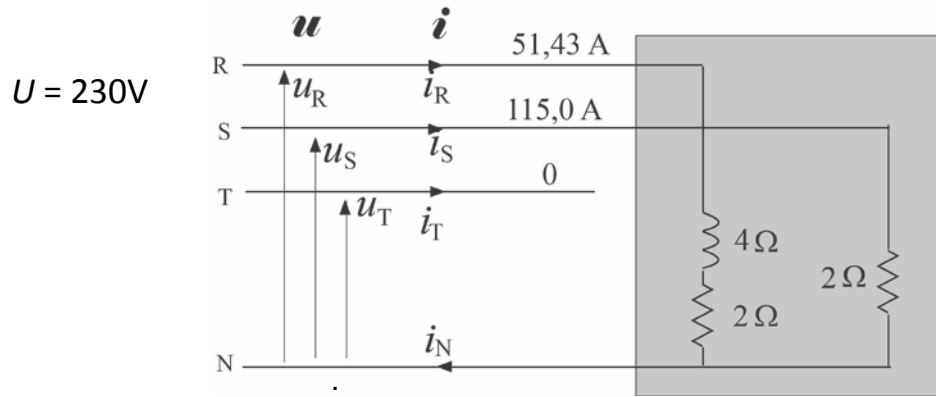
$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\|$$

$$\|\mathbf{i}_u^n\| = A^n \|\mathbf{u}\|$$

$$\|\mathbf{i}_u^z\| = A^z \|\mathbf{u}\|.$$





$$Y_R = \frac{1}{2 + j4} = 0,10 - j0,20 \text{ S}, \quad Y_S = 0,50 \text{ S} \quad Y_T = 0.$$

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{51,43^2 + 115,0^2} = 126,0 \text{ A}.$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3} U = \sqrt{3} \times 230 = 398,4 \text{ V}$$

$$Y_e = G_e + jB_e = \frac{1}{3}(Y_R + Y_S + Y_T) = 0,02 - j0,067 \text{ S}.$$

$$A^n = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T) = 0,0924 e^{j122,7^\circ} \text{ S}$$

$$A^z = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T) = 0,217 e^{-j103^\circ} \text{ S}.$$

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|^2 = 0,20 \times 398,4 = 79,68 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_T\| = |B_e| \|\mathbf{u}\|^2 = 0,0667 \times 398,4 = 26,57 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u^n\| = A^n \|\mathbf{u}\|^2 = 0,0924 \times 398,4 = 36,81 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u^z\| = A^z \|\mathbf{u}\|^2 = 0,217 \times 398,4 = 86,45 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_T\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2} = \sqrt{79,68^2 + 26,57^2 + 36,81^2 + 86,45^2} = 126,0 \text{ A}.$$

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2 \quad | \times \|\mathbf{u}\|^2$$

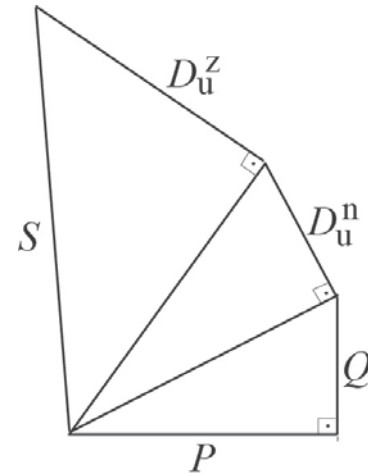
$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^{n2} + D_u^{z2}$$

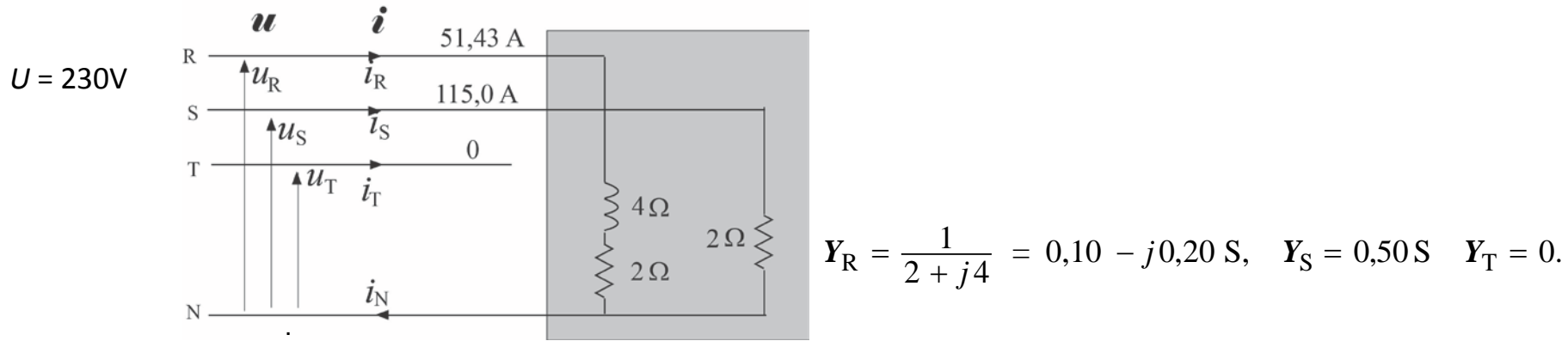
$$P = \|\mathbf{i}_a\| \|\mathbf{u}\| = G_e \|\mathbf{u}\|^2$$

$$Q \stackrel{\text{df}}{=} \pm \|\mathbf{i}_r\| \|\mathbf{u}\| = -B_e \|\mathbf{u}\|^2$$

$$D_u^n \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{i}_u^n\| \|\mathbf{u}\| = A^n \|\mathbf{u}\|^2$$

$$D_u^z \stackrel{\text{df}}{=} \|\mathbf{i}_u^z\| \|\mathbf{u}\| = A^z \|\mathbf{u}\|^2$$





$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{51,43^2 + 115,0^2} = 126,0 \text{ A.}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3} U = \sqrt{3} \times 230 = 398,4 \text{ V}$$

$$Y_e = G_e + jB_e = \frac{1}{3}(Y_R + Y_S + Y_T) = 0,02 - j0,067 \text{ S.}$$

$$A^n = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha Y_S + \alpha^* Y_T) = 0,0924 e^{122,7^\circ} \text{ S}$$

$$A^z = \frac{1}{3}(Y_R + \alpha^* Y_S + \alpha Y_T) = 0,217 e^{-j103^\circ} \text{ S.}$$

$$P = G_e \|\mathbf{u}\|^2 = 0,02 \times (398,4)^2 = 31,7 \text{ kW}$$

$$Q = -B_e \|\mathbf{u}\|^2 = 0,0667 \times (398,4)^2 = 10,6 \text{ kvar}$$

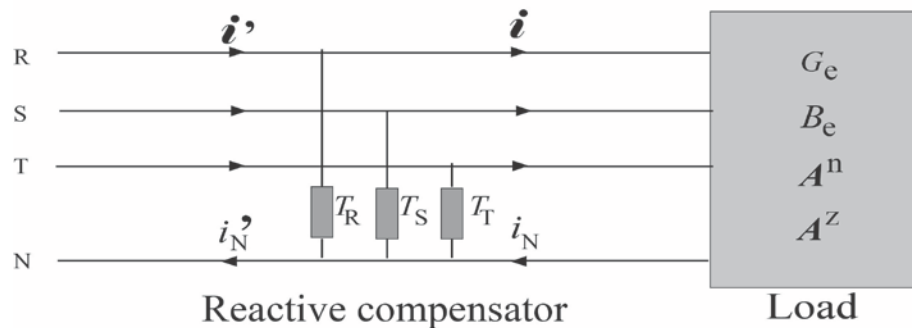
$$D_u^n = A^n \|\mathbf{u}\|^2 = 0,0924 \times (398,4)^2 = 14,7 \text{ kVA}$$

$$D_u^z = A^z \|\mathbf{u}\|^2 = 0,217 \times (398,4)^2 = 34,4 \text{ kVA.}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D_u^{n2} + D_u^{z2}} = \sqrt{31,7^2 + 10,6^2 + 14,7^2 + 34,4^2} = 50,2 \text{ kVA}$$

Kompensacja reaktancyjna w obwodach trójfazowych z przewodem zerowym

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\|\mathbf{i}\|} = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u^n\|^2 + \|\mathbf{i}_u^z\|^2}}$$

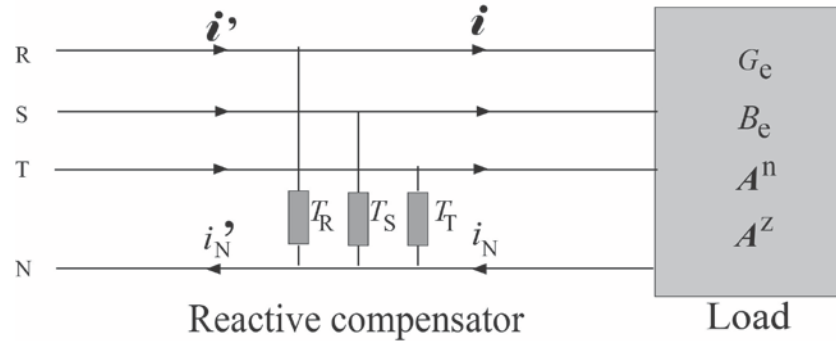


$$\mathbf{i}'_r \equiv 0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{3}(T_R + T_S + T_T) + B_e = 0.$$

$$\mathbf{i}'_u^n \equiv 0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{3}j(T_R + \alpha T_S + \alpha^* T_T) + A^n = 0$$

$$\mathbf{i}'_u^z \equiv 0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{3}j(T_R + \alpha^* T_S + \alpha T_T) + A^z = 0$$

5 równań, 3 niewiadome: sprzeczny układ równań



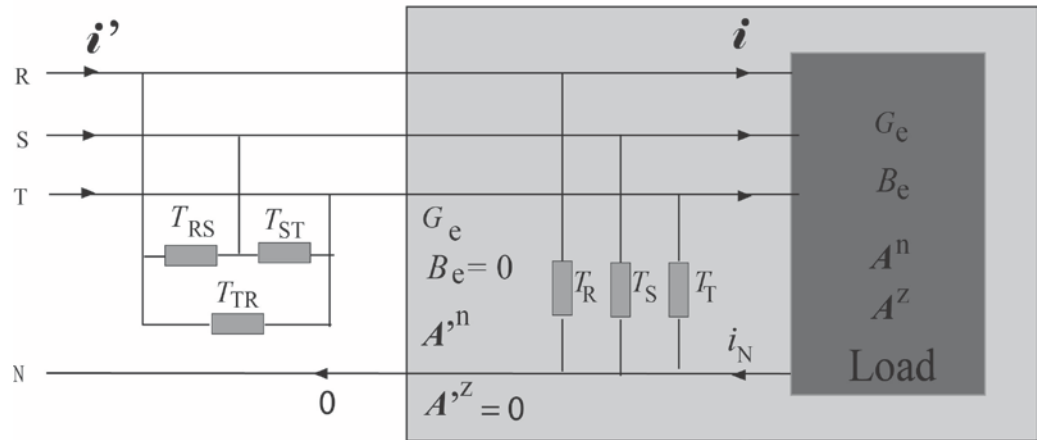
$$\mathbf{i}'_r \equiv 0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{3}(T_R + T_S + T_T) + B_e = 0.$$

$$\mathbf{i}'_u^z \equiv 0 \quad \text{if} \quad \frac{1}{3}j(T_R + \alpha T_S + \alpha^2 T_T) + A^z = 0$$

$$T_R = -2\text{Im}A^z - B_e$$

$$T_S = -\sqrt{3}\text{Re}A^z + \text{Im}A^z - B_e$$

$$T_T = \sqrt{3}\text{Re}A^z + \text{Im}A^z - B_e.$$

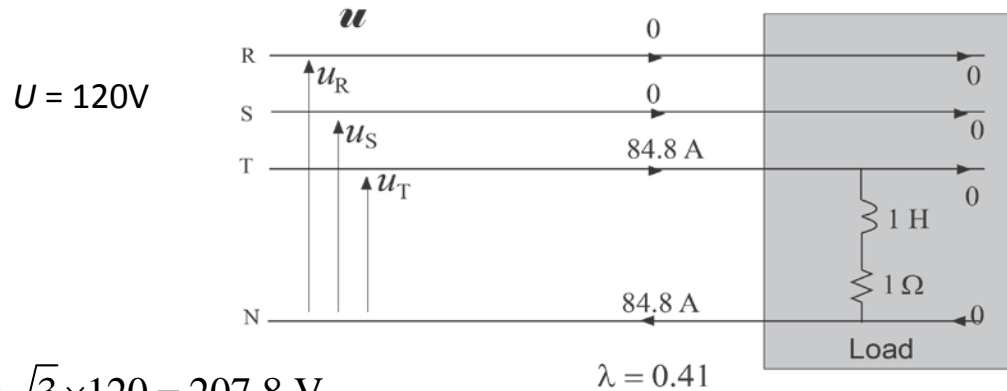


$$\mathbf{i}'_u{}^n \equiv 0 \quad \text{if} \quad j(T_{ST} + \alpha T_{TR} + \alpha^* T_{RS}) + \mathbf{A}'^n = 0$$

$$T_{RS} = (\sqrt{3} \operatorname{Re} A_u'^n - \operatorname{Im} A_u'^n) / 3$$

$$T_{ST} = (2 \operatorname{Im} A_u'^n) / 3$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \operatorname{Re} A_u'^n - \operatorname{Im} A_u'^n) / 3$$



$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3}U_R = \sqrt{3} \times 120 = 207.8 \text{ V}$$

$$\mathbf{Y}_e = G_e + jB_e = \frac{1}{3}(\mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_S + \mathbf{Y}_T) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + j1} = 0.167 - j0.167 \text{ S}$$

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{3}(\mathbf{Y}_R + \alpha \mathbf{Y}_S + \alpha^* \mathbf{Y}_T) = \frac{1}{3} \alpha^* \mathbf{Y}_T = \frac{1}{3} \alpha^* \frac{1}{1 + j1} = 0.236 e^{-j165^\circ} = -0.228 - j0.061 \text{ S}$$

$$\mathbf{A}^z = \frac{1}{3}(\mathbf{Y}_R + \alpha^* \mathbf{Y}_S + \alpha \mathbf{Y}_T) = \frac{1}{3} \alpha \mathbf{Y}_T = \frac{1}{3} \alpha \frac{1}{1 + j1} = 0.236 e^{j75^\circ} = 0.061 + j0.228 \text{ S}.$$

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\| = 0.167 \times 207.8 = 34.7 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_T\| = |B_e| \|\mathbf{u}\| = 0.167 \times 207.8 = 34.7 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u^n\| = A^n \|\mathbf{u}\| = 0.236 \times 207.8 = 49.0 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u^z\| = A^z \|\mathbf{u}\| = 0.236 \times 207.8 = 49.0 \text{ A}.$$

Kompensator Y składowej zerowej:

$$T_R = -2 \operatorname{Im} A^z - B_e = -0.289 \text{ S}$$

$$T_S = -\sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e = 0.289 \text{ S}$$

$$T_T = \sqrt{3} \operatorname{Re} A^z + \operatorname{Im} A^z - B_e = 0.50 \text{ S.}$$

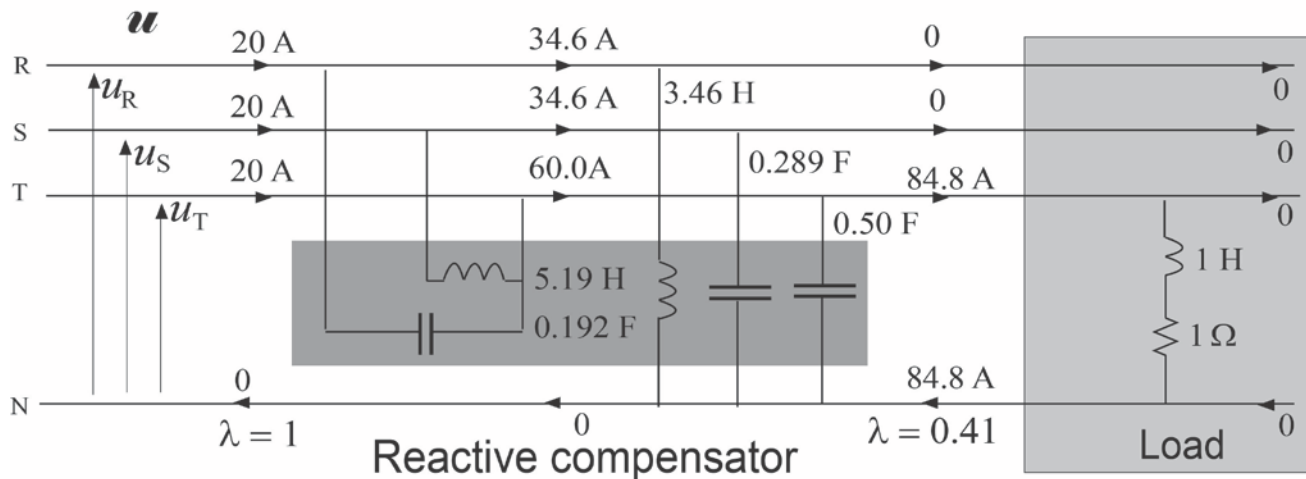
$$A'^n = A^{z*} + A^n = (0.061 + j0.228)^* - 0.228 - j0.061 = -0.167 - j0.289 \text{ S}$$

$$T_{RS} = (\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3 = 0$$

Kompensator Δ składowej ujemnej:

$$T_{ST} = (2 \operatorname{Im} A'^n) / 3 = -0.192 \text{ S}$$

$$T_{TR} = (-\sqrt{3} \operatorname{Re} A'^n - \operatorname{Im} A'^n) / 3 = 0.192 \text{ S.}$$

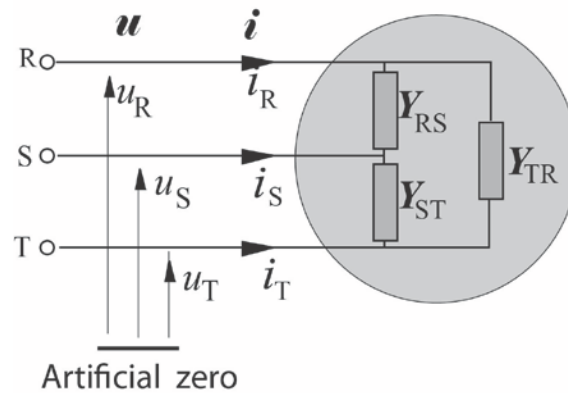
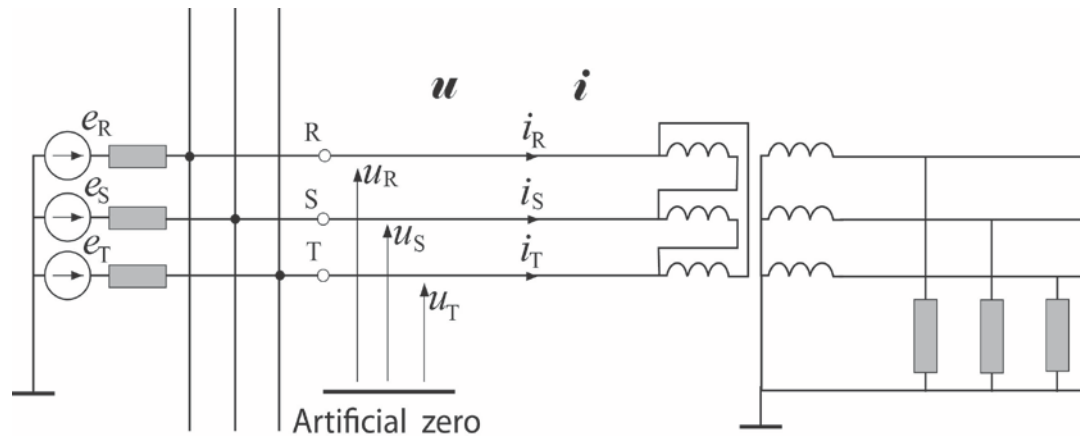


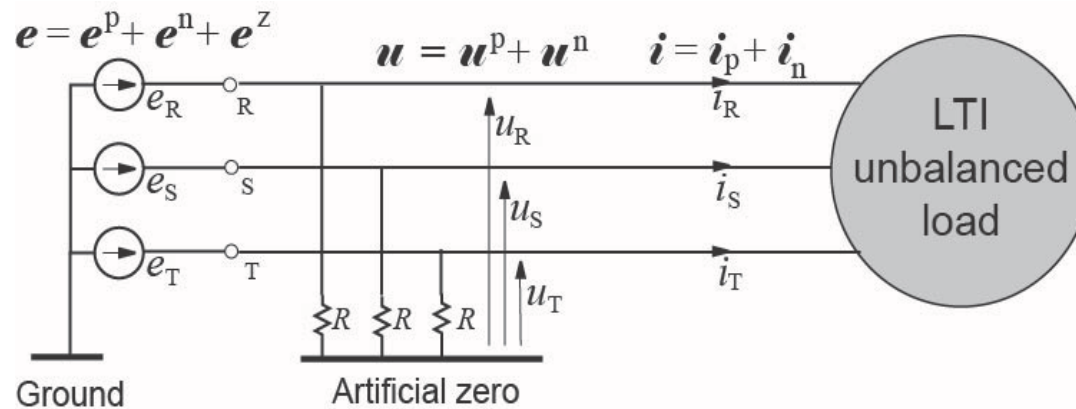
Poprawny opis właściwości energetycznych obwodów czteroprzewodowych
z sinusoidalnym napięciem zasilania
tworzy solidną podstawę
do poszukiwania równania mocy i metod projektowania
kompensatorów reaktancyjnych
pracujących przy napięciu odkształconym

Powyższe wyniki dotyczą jedynie odbiorników trójfazowych
zasilanych symetrycznie

Nie są one prawdziwe w przypadków odbiorników trójfazowych
z asymetrycznym napięciem zasilania

Moce stacjonarnych odbiorników LTI zasilanych trójprzewodowo z asymetrycznym, lecz sinusoidalnym napięciem zasilania





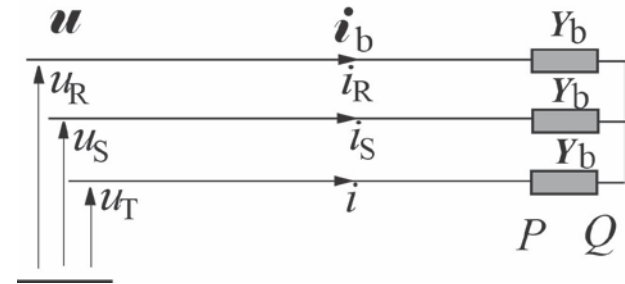
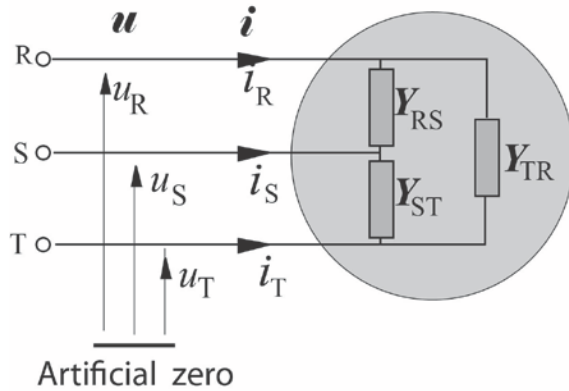
Pałapka superpozycji

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_p + \mathbf{i}_n = (\mathbf{i}_a^p + \mathbf{i}_r^p + \mathbf{i}_u^n) + (\mathbf{i}_a^n + \mathbf{i}_r^n + \mathbf{i}_u^p)$$

Składowe te nie są wzajemnie ortogonalne.

Wartość skuteczna prądu zasilania
nie może być obliczana

z sumy kwadratów wartości skutecznych tych sześciu prądów składowych



$$Y_b = G_b + jB_b = \frac{P - jQ}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{C_b^*}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$$\mathbf{i}_a = G_b \mathbf{u} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{i}_r = B_b \mathbf{u}(t+T/4) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{i} - \mathbf{i}_b = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(I - I_b) e^{j\omega t}\} = \mathbf{i}_u = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I_u e^{j\omega t}\}.$$

**Rozkład prądu zasilania na
Składowe Fizyczne:**

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u$$

Można wykazać, że prądy te są wzajemnie ortogonalne, zatem

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2$$

Mnożąc to równanie przez kwadrat wartości skutecznej napięcia zasilania, $\|\mathbf{u}\|$,
otrzymuje się równanie mocy
odbiornika LTI zasilanego sinusoidalnym i asymetrycznym napięciem

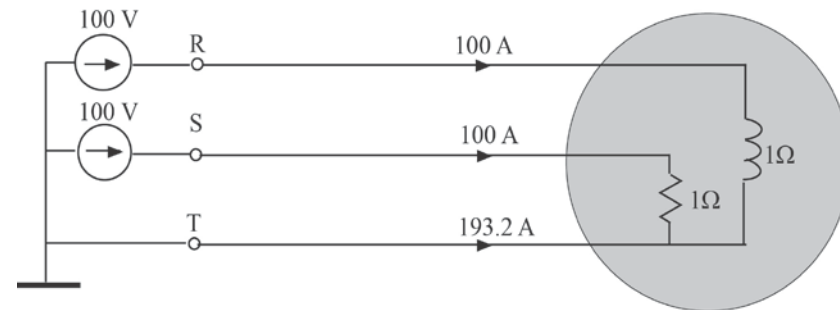
$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2$$

Przykład

$$U_R = 100\text{V},$$

$$U_S = 100e^{-j2\pi/3}\text{V},$$

$$\begin{bmatrix} U^p \\ U^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.66 \\ 33.33e^{j60^\circ} \end{bmatrix} \text{V}$$

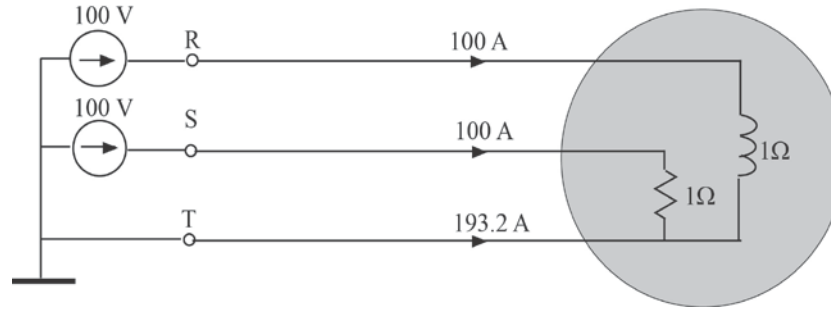


$$Y_b = G_b + jB_b = \frac{P - jQ}{\|\mathbf{u}\|^2} = 0.600 - j0.600 \text{ S}$$

$$\mathbf{i}_a = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I_a e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{G_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 52.91e^{j19.1^\circ} \\ 52.91e^{-j139.1^\circ} \\ 20e^{j120^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A.}$$

$$\mathbf{i}_r = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{I_r e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{jB_b (U^p + U^n) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 52.91e^{-j70.9^\circ} \\ 52.91e^{j130.9^\circ} \\ 20e^{j30^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A.}$$

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(I - I_a - I_r) e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{bmatrix} 95.19e^{-j135^\circ} \\ 95.19e^{-j75^\circ} \\ 164.90e^{j75^\circ} \end{bmatrix} e^{j\omega t} \right\} \text{ A}$$



$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 193.2^2} = 239.4 \text{ A}$$

Wartości skuteczne Składowych Fizycznych prądu zasilania:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_b \|\mathbf{u}\| = 0.60 \times 129.1 = 77.46 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = /B_b \|\mathbf{u}\| = 0.60 \times 129.1 = 77.46 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = \sqrt{I_{uR}^2 + I_{uS}^2 + I_{uT}^2} = \sqrt{95.19^2 + 95.19^2 + 164.90^2} = 212.87 \text{ A.}$$

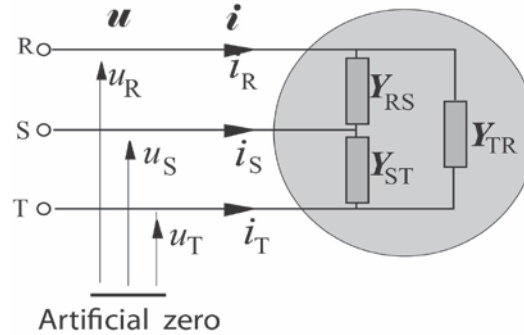
Weryfikacja poprawności rozkładu prądu na Składowe Fizyczne:

$$\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2} = \sqrt{77.46^2 + 77.46^2 + 212.87^2} = 239.4 \text{ A} = \|\mathbf{i}\|.$$

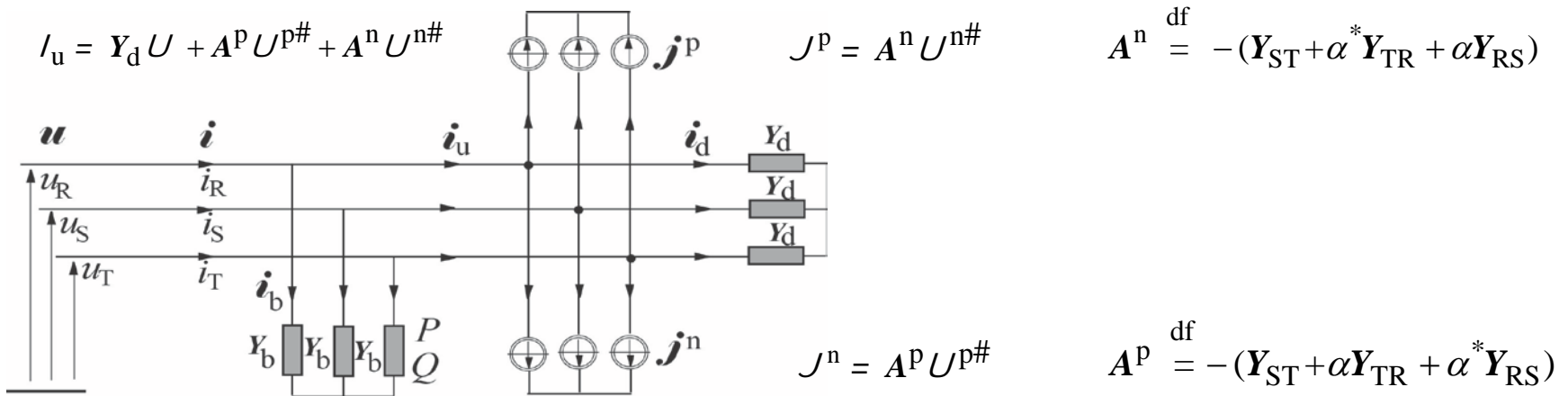
Sam rozkład prądu na Składowe Fizyczne
nie tworzy jeszcze podstaw dla kompensacji reaktancyjnej
prądu biernego i prądu niezrównoważenia

gdyż nie określa relacji tych prądów
z parametrami kompensatora

$$\frac{U^n}{U^p} = a = a e^{j\psi}$$



Equivalent circuit of unbalanced LTI load supplied with asymmetrical voltage:

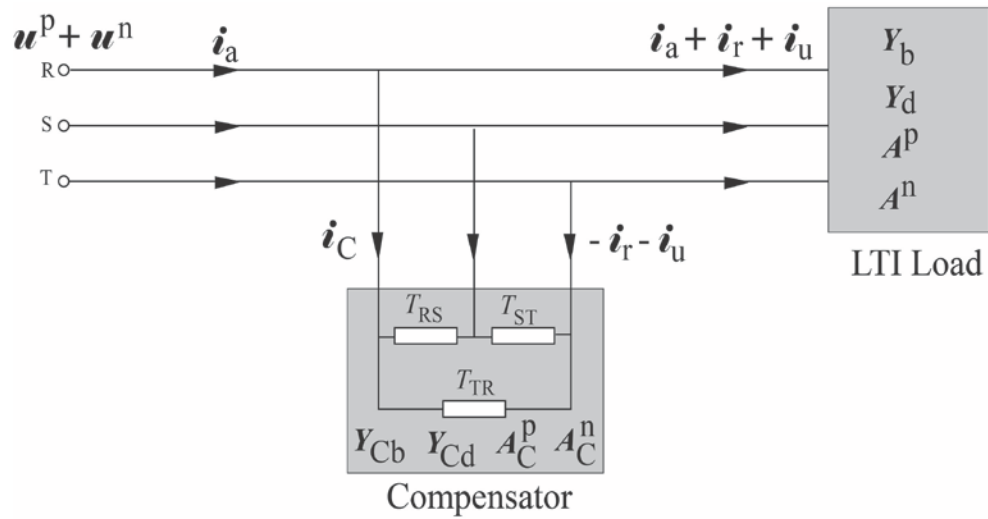


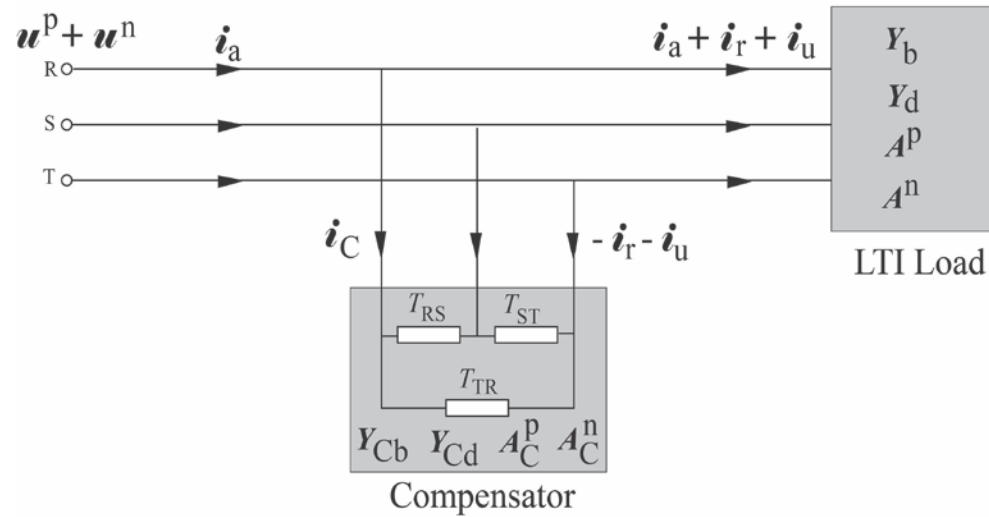
$$Y_d = \frac{2a}{1+a^2} [Y_{ST} \cos \psi + Y_{TR} \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + Y_{RS} \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})]$$

$$Y_b = Y_e - Y_d$$

$$Y_e = Y_{ST} + Y_{TR} + Y_{RS}$$

Kompensacja reaktancyjna odbiorników LTI zasilanych napięciem asymetrycznym





Warunek kompensacji prądu biernego:

$$B_{Cb} + B_b = 0$$

$$B_{Cb} = \frac{T_{RS} U_{RS}^2 + T_{ST} U_{ST}^2 + T_{TR} U_{TR}^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

Warunek kompensacji prądu niezrównoważenia:

$$(Y_{Cd} + Y_d)U_R + (A_C^p + A^p)U^p + (A_C^n + A^n)U^n = 0$$

$$Y_{Cd} = \frac{j2a}{1+a^2} [T_{ST} \cos \psi + T_{TR} \cos(\psi - \frac{2\pi}{3}) + T_{RS} \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})]$$

$$A_C^p = -j(T_{ST} + \alpha T_{TR} + \alpha^* T_{RS})$$

$$A_C^n = -j(T_{ST} + \alpha^* T_{TR} + \alpha T_{RS})$$

Równanie kompensatora:

$$\begin{bmatrix} U_{RS}^2 & U_{ST}^2 & U_{TR}^2 \\ \operatorname{Re} \mathbf{F}_1 & \operatorname{Re} \mathbf{F}_2 & \operatorname{Re} \mathbf{F}_3 \\ \operatorname{Im} \mathbf{F}_1 & \operatorname{Im} \mathbf{F}_2 & \operatorname{Im} \mathbf{F}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{RS} \\ T_{ST} \\ T_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_b \|\mathbf{u}\|^2 \\ -\operatorname{Re} \mathbf{F}_4 \\ -\operatorname{Im} \mathbf{F}_4 \end{bmatrix}$$

ze współczynnikami macierzy:

$$\mathbf{F}_1 \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{c}_3 (1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha^* + \alpha ae^{j\psi})$$

$$\mathbf{F}_2 \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{c}_1 (1 + ae^{j\psi}) - j(1 + ae^{j\psi})$$

$$\mathbf{F}_3 \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{c}_2 (1 + ae^{j\psi}) - j(\alpha + \alpha^* ae^{j\psi})$$

$$\mathbf{F}_4 \stackrel{\text{df}}{=} (1 + ae^{j\psi}) \mathbf{Y}_d + \mathbf{A}^p + (1 + ae^{j\psi}) \mathbf{A}^n.$$

$$\mathbf{c}_1 \stackrel{\text{df}}{=} j \frac{2a \cos \psi}{1 + a^2}$$

$$\mathbf{c}_2 \stackrel{\text{df}}{=} j \frac{2a \cos(\psi - 120^\circ)}{1 + a^2}$$

$$\mathbf{c}_3 \stackrel{\text{df}}{=} j \frac{2a \cos(\psi - 240^\circ)}{1 + a^2}.$$

Dziękuję za uwagę!